

Estratto dal *Periodico di Matematiche*  
Febbraio 1963 - Serie IV, vol. XLI n. 1 (pagg. 17-37)

---

C. F. MANARA

## Un elegante teorema sugli ovali



NICOLA ZANICHELLI EDITORE  
BOLOGNA

## PERIODICO DI MATEMATICHE

Il *Periodico di Matematiche* continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione, e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da FEDERIGO ENRIQUES nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il *Periodico* pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato, ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giuochi, paradossi, etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

---

Il primo numero (Febbraio 1963) della quarantunesima annata consta di 64 pagine e contiene, oltre le Questioni, i seguenti articoli:

- A. NATUCCI - *Storia della teoria delle equazioni* - Parte I.
- C. F. MANARA - *Un elegante teorema sugli ovali.*
- A. M. GHIRLANDA - *La teoria delle distribuzioni.*
- M. DEDÒ - *Una verifica analitica diretta del teorema di Salmon.*
- S. DI NOI - *Una proposizione di trigonometria tanto immediata quanto utile.*

---

Abbonamento 1963: Italia L. 1200 — - Estero L. 2400—.

Il *Periodico* si pubblica in 5 fascicoli annuali.

---

L'importo dell'abbonamento e ogni altra comunicazione di indole amministrativa deve inviarsi esclusivamente alla Casa Editrice Nicola Zanichelli  
C.C. Postale 8/36

---

Le annate complete 39, 40, 41, 42, 43, 46, 47, 48, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 e 62 dell'attuale serie del

## PERIODICO DI MATEMATICHE

sono in vendita al prezzo di L. 1600 l'annata, per l'Italia,  
L. 2400 per l'estero.

Esistono fascicoli separati dei vari volumi al prezzo di:  
L. 600 al fascicolo per l'Italia — L. 1200 per l'estero.

Estratto dal *Periodico di Matematiche*  
Febbraio 1963 - Serie IV, vol. XLI n. 1 (pagg. 17-37)

---

C. F. MANARA

## Un elegante teorema sugli ovali



NICOLA ZANICHELLI EDITORE  
BOLOGNA

## Un elegante teorema sugli ovali

---

§ 1. - Il presente articolo ha lo scopo di illustrare ai Lettori di questo Periodico un elegante teorema di Geometria integrale, che viene abitualmente indicato come « Teorema dei quattro vertici » oppure anche, con termine tedesco equivalente « Vierscheitelsatz »; tale teorema afferma che: « Su una curva piana « ovale esistono almeno quattro punti (vertici) nei quali la curvatura ha un massimo oppure un minimo »; quindi la curvatura possiede su una curva cosiffatta almeno due massimi e due minimi.

Tra le numerosissime dimostrazioni che esistono di tale teorema<sup>(1)</sup> illustreremo quelle che riteniamo più interessanti per la loro eleganza, oppure per i collegamenti che permettono di stabilire con altre interessanti proposizioni oppure infine per le ipotesi via via meno restrittive su cui si basano. Le prime due dimostrazioni che esporremo (nei §§ 3 e 4) fanno appello a nozioni di calcolo integrale; per la prima inoltre si richiede che la curvatura, considerata come funzione dell'arco della curva, sia derivabile in ogni punto; per la seconda invece si richiede che la curvatura sia una funzione continua dell'arco; infine per l'ultima dimostrazione faremo appello a proprietà topologiche delle corrispondenze sulla curva chiusa che già sono state applicate in altri casi<sup>(2)</sup>.

È superfluo avvertire che, come il teorema non è nuovo, ma anzi è classico per la Geometria integrale, così le dimostrazioni

---

(1) Tra le più recenti ricordiamo quella contenuta nella Nota del dott. Giovanni Melzi dal titolo: Sulla dimostrazione di un classico teorema riguardante gli ovali nel piano. *Ist. Lomb. (Rend. Sc.) A.* 96, (1962). Nella nota citata vengono anche fornite ampie notizie bibliografiche sul teorema in oggetto e sulle sue estensioni.

(2) Si veda per es. O. Chisini: Sulla forma delle quartiche gobbe di prima specie e delle curve ellittiche normali. *Rend. Ist. Lomb.* 53 (1920) 591, 599.

che esporremo non hanno nessuna pretesa di novità sostanziale, anche se di alcune illustrazioni e precisazioni non ci è stato dato di trovar traccia nella letteratura.

§ 2. - Sia dunque in un piano  $\alpha$  una curva  $\gamma$  ovale, cioè una curva chiusa i cui punti sono tutti a distanza finita e che soddisfa alle seguenti ipotesi:

a) in ogni suo punto ammette curvatura diversa da zero;

b) ogni retta del piano  $\alpha$  la incontra al massimo in due punti.

Dalle ipotesi enunciate segue facilmente che la curva è omeomorfa ad una circonferenza; in particolare dalla ipotesi a) segue immediatamente che la curva  $\gamma$  è rettificabile. Essa ammette quindi una lunghezza finita, che indicheremo d'ora innanzi con  $L$ . È possibile dunque stabilire sulla  $\gamma$  una ascissa curvilinea nel modo solito, assumendo come origine un punto  $P_0$  scelto arbitrariamente; pertanto d'ora innanzi potremo supporre che ogni funzione (scalare o vettoriale) che verrà indicata brevemente come « funzione del punto  $P$  variabile sulla  $\gamma$  » sia espressa effettivamente come funzione dell'ascissa curvilinea  $s$  del punto  $P$ , lunghezza dell'arco di curva compreso tra  $P_0$  e  $P$  misurata secondo il verso di percorrenza che è stato scelto come positivo. Supporremo inoltre di aver scelto il verso positivo in modo che corrisponda ad un percorso antiorario sulla curva  $\gamma$ .

In ogni punto della curva  $\gamma$  esistono due versori  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  tangente e normale; il versore tangente  $\mathbf{t}$  è definito dalla relazione

$$(1) \quad \mathbf{t} = \frac{dP}{ds}$$

ed il versore normale  $\mathbf{n}$  è perpendicolare al versore  $\mathbf{t}$  ed orientato in modo che quest'ultimo possa essere portato a coincidere con  $\mathbf{n}$  mediante una rotazione di  $\pi/2$  in verso antiorario; quindi il versore  $\mathbf{n}$  risulta diretto verso l'interno della regione del piano  $\alpha$  limitata dalla curva  $\gamma$ .

Fissato nel piano un versore  $\mathbf{i}$ , indichiamo con  $\vartheta(s)$  l'angolo tra il versore stesso ed il versore  $\mathbf{t}(s)$  tangente alla curva nel punto  $P$  che ha ascissa curvilinea  $s$ ; quindi, indicata con  $c(s)$

la curvatura della curva  $\gamma$  nel punto stesso si ha

$$(2) \quad c(s) = \frac{d\vartheta}{ds}$$

e la ipotesi  $a$ ) può essere precisata ulteriormente in base alle convenzioni scelte per il verso degli angoli e per il verso positivo di percorrenza sulla curva  $\gamma$  dicendo che:

$a')$  la curvatura  $c(s)$  definita dalla (2) è in ogni punto della curva  $\gamma$  essenzialmente positiva.

Si ha poi immediatamente dalla ipotesi  $a$ ) oppure dalla  $a')$  ora enunciata che la curva  $\gamma$  risulta essere priva di flessi.

Nel seguito ci farà comodo considerare ogni funzione (scalare o vettoriale) del punto  $P$  variabile sulla curva  $\gamma$  come una funzione periodica della variabile  $s$ , con periodo  $L$ . Pertanto per qualunque funzione  $f(s)$  supporremo che sia valida la relazione

$$f(s) = f(s + L)$$

e porremo inoltre convenzionalmente

$$(3) \quad \oint f(s) ds = \int_k^{k+L} f(s) ds$$

essendo  $k$  un numero reale qualunque.

Da quanto precede e dalle proprietà fondamentali ed elementari delle funzioni periodiche segue facilmente la validità della seguente

OSSERVAZIONE 1. - Se la funzione  $f(s)$  è continua, essa è costante oppure, quando  $s$  aumenta di un periodo, cioè quando  $s$  assume tutti i valori soddisfacenti alle relazioni

$$k \leq s < k + L$$

(supposto che  $f(k)$  non sia nè un massimo nè un minimo) possiede un numero pari di estremali (massimi o minimi) e precisamente tanti massimi quanti minimi.

Per semplicità supporremo infine che la curva  $\gamma$  soddisfi alla seguente ipotesi:

$c)$  non esiste nessun arco in ogni punto del quale la curvatura assuma lo stesso valore.

Ciò equivale ad escludere dalle nostre considerazioni il caso di un ovale  $\gamma$  che possenga archi appartenenti a circonferenze ed in particolare ad escludere che  $\gamma$  stessa sia una circonferenza.

Da quanto precede e dalle ipotesi enunciate si ha facilmente la validità della

OSSERVAZIONE 2. - Fissata una qualunque retta del piano  $\alpha$  esistono sulla curva  $\gamma$  due punti e due soli nei quali la tangente è parallela alla retta; di più, fissato un valore dell'angolo  $\vartheta$  che soddisfi alle limitazioni

$$(4) \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$$

esiste sulla  $\gamma$  un unico punto cui corrisponde un versore tangente  $\mathbf{t}$  che dà luogo alla relazione: angolo  $\mathbf{i} \mathbf{t} = \vartheta$ .

Ricordiamo infine che per la curva  $\gamma$ , come per ogni altra curva che in ogni suo punto possenga una curvatura definita, valgono le classiche formule, dette anche «formule di Frenet»

$$(5) \quad d\mathbf{t} = cnd\mathbf{s}; \quad d\mathbf{n} = -ctd\mathbf{s}.$$

§ 3. - Una prima dimostrazione del teorema che ci interessa è di notevole eleganza<sup>(3)</sup>; tuttavia essa si basa su una ipotesi più restrittiva di quella enunciata nel precedente sub  $a$ ) e precisamente si basa sulla ipotesi

$a''$ ) la curvatura della curva  $\gamma$  ammette una derivata che a sua volta è funzione continua del parametro  $s$ .

Posto per comodità.

$$c' = \frac{dc}{ds}$$

la dimostrazione si basa sul seguente

LEMMA 1. - Indicato con  $O$  un punto qualunque del piano  $\alpha$ , con  $P$  un punto della curva e con  $\mathbf{i}$  ancora un versore fisso, si ha

$$(6) \quad \oint \mathbf{i} \times (P - O)c'ds = 0.$$

(3) La dimostrazione trovasi esposta con altre notazioni per es. nel volume di W. Blaschke: «Vorlesungen über Differentialgeometrie» (Berlino, 1924) e l'Autore la attribuisce a Herglotz.

Per la dimostrazione si consideri la funzione  $\varphi$  dell'ascissa curvilinea  $s$  definita dalla

$$(7) \quad \varphi(s) = \mathbf{i} \times (P - O)c$$

derivando la funzione  $\varphi$  rispetto ad  $s$  e ricordando la (1) si ha

$$(8) \quad d\varphi = \mathbf{i} \times \{ \mathbf{t}cds + (P - O)c'ds \}.$$

Ricordiamo ora la (2) ed osserviamo che si ha ovviamente

$$(9) \quad \mathbf{i} \times \mathbf{t} = \cos \vartheta.$$

Quindi la (8) può essere scritta nella forma

$$(8') \quad d\varphi = \cos \vartheta d\vartheta + \mathbf{i} \times (P - O)c'ds.$$

Ora la funzione  $\varphi(s)$  definita dalla (7) è chiaramente una funzione periodica della variabile  $s$ , con periodo  $L$  e quindi si ha

$$(10) \quad \oint d\varphi = 0$$

e d'altra parte è anche

$$(11) \quad \oint \cos \vartheta d\vartheta = 0$$

perchè l'angolo  $\vartheta$  aumenta di  $2\pi$  quando il punto  $P$  descrive la intera curva  $\gamma$ . Dal confronto della (8') con la (10) e la (11) si trae immediatamente la validità della (6).

Osserviamo ora che il numero  $\mathbf{i} \times (P - O)$  rappresenta in valore assoluto e segno la distanza del punto  $P$  dalla retta orientata passante per  $O$  ed avente come normale orientata il versore  $\mathbf{i}$ .

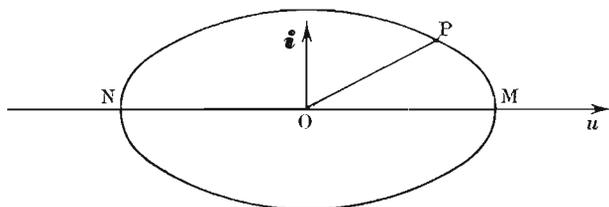


Fig. 1

Ritorniamo ora a considerare la nostra curva; ricordiamo che in base alla ipotesi  $c$ ), con la quale abbiamo escluso che  $c$  sia costante, ed in base alla Osservazione 1 possiamo concludere che la curvatura  $c$  assume almeno un valore massimo ed un valore minimo sulla curva; indichiamo con  $M$  ed  $N$  i punti (certamente distinti tra loro) nei quali la curvatura assume rispettivamente il valore massimo e minimo e chiamiamo  $u$  la retta che congiunge  $M$  con  $N$ , retta che orienteremo a piacere, fissando poi il punto  $O$  su di essa e scegliendo il versore  $\mathbf{i}$  normale ad essa (orientato nel modo abituale). Se  $M$  ed  $N$  fossero i soli punti in cui la curvatura assume un valore massimo o minimo, la funzione  $c'(s)$  avrebbe quei due punti come soli zeri e cambierebbe di segno soltanto in corrispondenza ad essi. Consideriamo ora l'integrale che compare al primo membro della (6) e che qui riscriviamo per comodità del lettore

$$(6) \quad \oint \mathbf{i} \times (P - O)c'ds = 0;$$

l'integrando è prodotto di due fattori: il primo è il numero  $\mathbf{i} \times (P - O)$  il quale, per la interpretazione che ne abbiamo data e per la scelta fatta della retta  $u$  (cioè del punto  $O$  e del versore  $\mathbf{i}$ ) rappresenta la distanza con segno del punto  $P$  variabile sulla curva dalla retta  $u$ .

Il secondo fattore è la funzione  $c'(s)$  la quale, per la ipotesi fatta, cambia pure di segno soltanto in corrispondenza ai punti  $M$  ed  $N$ . Quindi l'integrando dell'integrale al primo membro della (6) ha sempre uno stesso segno in tutti i punti della curva; allora, poichè tale integrando è una funzione continua di  $s$ , per elementari proprietà degli integrali definiti, la (6) non può sussistere.

È falsa dunque la ipotesi da cui siamo partiti, cioè che la curvatura ammettesse solo un massimo ed un minimo sulla curva  $\gamma$ ; dunque, sempre in forza della Osservazione 1, la curvatura ammette almeno due massimi e due minimi.

§ 4. - La dimostrazione che abbiamo esposta nel precedente §, benchè notevolmente elegante, presuppone tuttavia che la curvatura  $c(s)$  ammetta una derivata e che questa sia una funzione continua del parametro  $s$ .

È possibile dare altre dimostrazioni che si basano su ipotesi meno restrittive; esporremo qui una dimostrazione che si basa sulla sola ipotesi che la curvatura  $c(s)$  sia una funzione continua del parametro  $s$ .

Premettiamo alcune osservazioni molto facili: fissato ancora un versore  $i$  e dato all'angolo  $\vartheta$  il significato che gli abbiamo attribuito nel § 3 e che è precisato dalla (9) si ha immediatamente

$$(12) \quad \oint \cos \vartheta \, c ds = \oint \cos \vartheta \, d\vartheta = 0$$

ed anche

$$(13) \quad \oint \sin \vartheta \, c ds = \oint \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Dal sussistere delle (12) e (13) si ha che, indicato con  $\eta$  un angolo fisso qualunque, è anche

$$(14) \quad \oint \cos(\vartheta + \eta) d\vartheta = 0.$$

Viceversa, con un semplice ragionamento che lasciamo completare al Lettore, si ha che dal sussistere della (14) per un angolo qualunque  $\eta$  segue il sussistere delle (12) e (13).

Le (12) e (13) possono ricevere una notevole illustrazione geometrica, in base alla quale sarà facile dedurre il nostro teorema. Al fine di conseguire tale illustrazione immaginiamo fissato nello spazio un sistema di coordinate ortogonali  $x, y, z$  scelto in modo che il piano  $\alpha$  su cui si trova la nostra curva abbia equazione

$$z = 0.$$

Consideriamo poi il cilindro  $\Gamma$  avente le generatrici parallele all'asse delle  $z$  ed avente come curva direttrice la curva  $\gamma$ . Su questo cilindro in corrispondenza ad ogni punto  $P$  di  $\gamma$  fissiamo il punto  $Q$  che appartiene alla generatrice passante per  $P$  ed ha la coordinata  $z$  data da

$$z = c(s)$$

essendo al solito  $s$  l'ascissa curvilinea di  $P$ . Il luogo dei punti

$Q$  è una curva  $\delta$ , in generale sghemba, tracciata sul cilindro  $\Gamma$  la quale, in forza della ipotesi  $a'$ ) (enunciata nel § 2) sta tutta nel semispazio delle  $z$  positive.

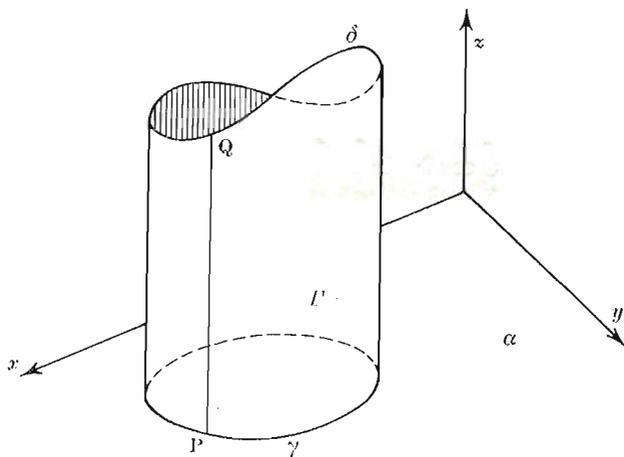


Fig. 2

L'insieme dei punti del cilindro  $\Gamma$  che stanno fra le due curve  $\gamma$  e  $\delta$  costituisce quindi una superficie  $H$  di cui  $\gamma$  e  $\delta$  sono gli orli; l'area di  $H$  è data evidentemente dall'integrale

$$(15) \quad S = \int c ds.$$

Sia ora  $\beta$  un piano parallelo all'asse delle  $z$  che intersechi il piano  $\alpha$  secondo una retta parallela al versore  $i$ ; per semplicità (benchè questo non sia affatto necessario) possiamo supporre che tale retta sia addirittura l'asse delle  $x$  e che quindi il piano  $\beta$  sia rappresentato dalla equazione

$$(16) \quad y = 0.$$

In base alla Osservazione 2 esistono sulla curva  $\gamma$  due punti nei quali le tangenti sono parallele all'asse delle  $y$ ; indichiamo con  $A$  e  $B$  tali punti e chiamiamo  $a$  e  $b$  rispettivamente le generatrici del cilindro  $\Gamma$  passanti per  $A$  e  $B$ . Le due generatrici  $a$  e  $b$  dividono la superficie  $H$  in due parti; una parte, che per fissare le idee chiameremo  $H_1$ , la quale è formata da punti di  $\Gamma$

che si proiettano ortogonalmente su  $\alpha$  in punti di  $\gamma$  in cui questa curva rivolge la sua concavità verso la parte positiva dell'asse delle  $y$ ; una seconda parte, che chiameremo  $H_2$ , la quale è formata da punti di  $H$  che si proiettano ortogonalmente su  $\alpha$  in punti di  $\gamma$  nei quali questa curva rivolge la sua convessità verso la parte positiva dell'asse delle  $y$  (in fig. sono segnati due punti  $P_1$  e  $P_2$  per i quali passano rispettivamente due generatrici appartenenti alle due parti  $H_1$  ed  $H_2$ ).

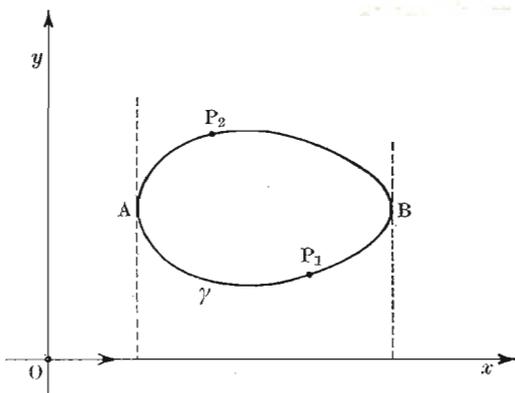


Fig. 3

Ognuna di queste due parti si proietta ortogonalmente sul piano  $\beta$  di equazione (16) in modo biunivoco in una figura mistilinea (rettangoloide); indicheremo rispettivamente con  $H_1'$  ed  $H_2'$  questi due rettangoloidi.

Si osservi ora che l'elemento d'area della figura  $H$  il quale corrisponde al punto  $P$  di ascissa curvilinea  $s$  vale ovviamente

$$dS = c ds$$

e che l'elemento d'area che si ottiene proiettando il precedente ortogonalmente sul piano  $\beta$  vale

$$dS' = \cos \vartheta c ds.$$

Pertanto questo secondo elemento ha il segno di  $\cos \vartheta$ : positivo quando è

$$-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$$

cioè quando l'elemento d'area proviene (per proiezione ortogo-

nale) dalla parte  $H_1$  della figura  $H$ , e negativo quando è

$$\pi/2 < \vartheta < 3\pi/2$$

cioè quando l'elemento d'area proviene (per proiezione ortogonale) dalla parte  $H_2$  della figura  $H$ .

Con questa illustrazione geometrica è ora del tutto ovvio che dalla (12) si trae immediatamente la validità del

**LEMMA 2.** - Le proiezioni ortogonali sul piano  $\beta$  delle due parti  $H_1$  ed  $H_2$  in cui la superficie  $H$  viene divisa dalle generatrici  $a$  e  $b$  sono due rettangoloidi che hanno aree uguali tra loro in valore assoluto.

Variamo ora la orientazione degli assi  $x$  ed  $y$  nel piano  $\alpha$ , prendendo per es. una nuova coppia di assi coordinati che si ottiene dalla precedente con una rotazione di un angolo qualunque, che possiamo indicare con  $-\eta$ . Da quanto precede e dalla (14) si trae facilmente il

**COROLLARIO.** - Il Lemma 2 conserva la sua validità qualunque sia il piano  $\beta$  (purchè sempre parallelo all'asse delle  $z$ , cioè perpendicolare al piano  $\alpha$ ).

Consideriamo il valore medio  $\mathcal{C}$  della funzione  $c(s)$  sull'intera curva, valore dato da

$$(17) \quad \mathcal{C} = \frac{1}{L} \oint c \, ds$$

e supponiamo ancora una volta che sulla curva  $\gamma$  esista un solo massimo ed un solo minimo per la curvatura  $c(s)$ ; si ha allora immediatamente la validità della

**OSSERVAZIONE 3.** - Nella ipotesi ammessa vi sono sulla  $\gamma$  non più di due punti nei quali la funzione  $c(s)$  assume il valore medio  $\mathcal{C}$ .

Invero (sempre escluso il caso in cui la  $\gamma$  sia una circonferenza) se esistessero sulla  $\gamma$  più di due punti in cui  $c$  assume il valore  $\mathcal{C}$ , tali punti dividerebbero la curva  $\gamma$  in tre archi almeno, in ognuno dei quali la  $c(s)$  dovrebbe avere un massimo oppure un minimo, perchè non è costante ed assume valori tra loro uguali negli estremi.

Indichiamo con  $C$  e  $D$  i due punti nei quali la funzione  $c(s)$  assume il valore medio  $\mathcal{C}$ ; si ha anche qui immediatamente la

OSSEVAZIONE 4. - Nella ipotesi ammessa i due punti  $C$  e  $D$  dividono la  $\gamma$  in due archi; nell'uno di essi la funzione  $c(s)$  assume valori non minori di  $\mathcal{C}$ , nell'altro assume valori non maggiori di  $\mathcal{C}$ .

Scegliamo ora nel piano  $\alpha$  la orientazione degli assi coordinati in modo che l'asse delle  $x$  sia parallelo alla congiungente di  $C$  con  $D$ .

Chiamiamo ancora  $H_1$  ed  $H_2$  le due parti in cui la superficie  $H$  viene divisa dalle generatrici passanti per i punti di  $\gamma$  nei quali le tangenti sono parallele all'asse delle  $y$ .

Per il modo come è stata scelta la orientazione degli assi si ha immediatamente che i valori assunti dalla funzione  $c(s)$  in una delle parti sono non minori di quelli assunti nell'altra. Pertanto con questa scelta degli assi il Corollario del Lemma 2 non risulta verificato. Risulta così provato anche in questo modo che è assurda la ipotesi da cui siamo partiti, che cioè sulla  $\gamma$  la curvatura  $c(s)$  abbia soltanto un massimo ed un minimo.

§ 5. - Esporremo infine una dimostrazione del teorema che si basa su proprietà topologiche delle corrispondenze tra punti di una curva chiusa. La dimostrazione sarà data fondandoci sulla sola ipotesi che la curvatura  $c(s)$  sia funzione continua della variabile  $s$ ; premetteremo in questo § alcuni Lemmi riguardanti proprietà ben note di Geometria differenziale e di topologia.

LEMMA 3. - Considerato un punto  $P_0$  dell'ovale  $\gamma$  e chiamata  $c_0$  la curvatura in  $P_0$ , condizione necessaria e sufficiente affinché  $c_0$  sia un massimo od un minimo locale della curvatura è che, almeno in un intorno circolare opportunamente ristretto di  $P_0$ , i punti della circonferenza osculatrice all'ovale siano tutti interni (nel caso del massimo) oppure rispettivamente tutti esterni (nel caso risp. del minimo) all'ovale.

Accenniamo brevemente alla dimostrazione: a tal fine assumiamo  $P_0$  come origine delle coordinate curvilinee sull'ovale, ed insieme come origine di un sistema di coordinate cartesiane nel piano  $\alpha$  assumendo la tangente in  $P_0$  all'ovale come asse

delle  $x$ . Indicando anche in questo caso con  $\vartheta(s)$  l'angolo che il versore tangente forma con l'asse delle  $x$ , dalla (2) e dalla scelta fatta del riferimento segue che si ha

$$(18) \quad \vartheta(v) = \int_0^v c(u) du.$$

Ricordiamo poi che, indicate con  $x(s)$  ed  $y(s)$  le coordinate del punto  $P$  dell'ovale considerate come funzioni di  $s$ , si ha

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \vartheta \\ \frac{dy}{ds} = \text{sen } \vartheta \end{cases}$$

e quindi, per la scelta del riferimento che abbiamo fatta si ha

$$(19) \quad \begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos \vartheta(v) dv \\ y(s) = \int_0^s \text{sen } \vartheta(v) dv. \end{cases}$$

Ora è

$$\begin{cases} \cos \vartheta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \vartheta^{2k} / (2k)! \\ \text{sen } \vartheta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} \vartheta^{2k+1} / (2k+1)! \end{cases}$$

essendo le serie convergenti assolutamente per ogni valore di  $\vartheta$  e convergenti in modo uniforme in ogni intervallo chiuso di valori di  $\vartheta$ . Pertanto si ha

$$(20) \quad \int_0^s \cos \vartheta(v) dv = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{(2k)!} \int_0^s [\vartheta(v)]^{2k} dv$$

$$(21) \quad \int_0^s \text{sen } \vartheta(v) dv = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{(2k+1)!} \int_0^s [\vartheta(v)]^{2k+1} dv.$$

Consideriamo ora la funzione

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2y/c_0;$$

è noto che la equazione

$$F(x, y) = 0$$

rappresenta la circonferenza osculatrice all'ovale in  $P_0$ . Inoltre il valore di

$$(22) \quad F(s) = F[x(s), y(s)]$$

essendo  $x(s)$  ed  $y(s)$  dati dalle (19), dà la potenza del punto dell'ovale avente le coordinate suddette rispetto alla circonferenza osculatrice.

Ora dalla (17) e dal teorema della media si ha

$$\vartheta(v) = v\bar{c}$$

dove, per la supposta continuità della funzione  $c(s)$ , il simbolo  $\bar{c}$  indica un opportuno valore assunto dalla funzione  $c(s)$  nell'intervallo

$$(23) \quad 0 < s < v$$

se è  $v > 0$  oppure rispettivamente nell'intervallo

$$(24) \quad 0 > s > v$$

se è  $v < 0$ .

Osserviamo ora che da quanto precede ed ancora per il teorema della media si ha

$$\int_0^s [\vartheta(v)]^n dv = \int_0^s v^n \bar{c}^n dv = \mathcal{C}_n \int_0^s v^n dv = \mathcal{C}_n s^{n+1}/(n+1)$$

dove abbiamo indicato con  $\mathcal{C}_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) opportuni valori della funzione  $\bar{c}$  assunti quando  $s$  appartiene agli intervalli dati dalle (23) o (24) rispettivamente, avendosi in particolare

$$\mathcal{C}_0 = 1.$$

Si ha allora immediatamente dalla (20) e dalla (21)

$$\begin{cases} x(s) = s - \mathcal{C}_2 s^3 / 3! + [5] \\ y(s) = \mathcal{C}_1 s^2 / 2 - \mathcal{C}_3 s^4 / 4! + [6] \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con [5] e [6] i termini degli sviluppi in serie che contengono potenze di ordine non inferiore a 5 ed a 6 rispettivamente. Si ha inoltre

$$\begin{cases} x^2 = s^2 - 2\mathcal{C}_2 s^4 / 3! + [5] \\ y^2 = \mathcal{C}_1^2 s^4 / 4! + [6] \\ -2y/c_0 = -\mathcal{C}_1 s^2 / c_0 + 2\mathcal{C}_3 s^4 / c_0 4! + [6] \end{cases}$$

e quindi eseguendo il calcolo per la funzione  $F(s)$  data dalla (22) si ha

$$F(s) = s^2(1 - \mathcal{C}_1/c_0) + [4].$$

Questa espressione per  $s$  opportunamente piccolo ha il segno del primo addendo; ora si ha chiaramente

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{C}_1(s) = c_0$$

potremo dunque porre

$$\mathcal{C}_1(s) = c_0 + \varepsilon(s)$$

essendo  $\varepsilon(s)$  infinitesimo con  $s$ . Ne segue che se  $c_0$  è un massimo locale si ha in un opportuno intorno del valore  $s=0$  sempre  $\varepsilon < 0$ ; quindi nello stesso intorno è sempre  $F(s) > 0$ ; se invece  $c_0$  è un minimo locale, in un opportuno intorno del valore  $s=0$  si ha sempre  $\varepsilon > 0$  e quindi  $F(s) < 0$ .

Il ragionamento si inverte facilmente e ci conduce quindi alla prova della proposizione enunciata.

Accanto al Lemma ora dimostrato richiamiamo brevemente alcune proprietà topologiche delle corrispondenze tra punti sull'ovale: a tal fine consideriamo due punti  $P_1$  e  $P_2$  sull'ovale e fissiamo l'attenzione su uno degli archi in cui tali punti dividono la curva; per es. sia questo l'arco che nel verso di percorrenza scelto come positivo ammette  $P_1$  come punto iniziale. Supponiamo che tra i punti dell'arco sia stabilita una corrispondenza involutoria e discorde la quale associa in particolare i punti

$P_1$  e  $P_2$ . Come è noto dalle ipotesi ora emesse segue subito che se un punto descrive l'arco in un verso, il corrispondente lo descrive nel verso opposto.

Sussiste allora il seguente

LEMMA 4. - Nell'interno dell'arco esiste un punto che è unito per la corrispondenza.

La dimostrazione si fa applicando il postulato della continuità e precisamente eseguendo una partizione dei punti dell'arco in due classi che potremo chiamare  $K_1$  e  $K_2$ ; ponendo nella prima i punti che nel verso prefissato precedono i loro corrispondenti e osservando che tale classe non è vuota perchè ad essa appartiene il punto  $P_1$ ; ponendo nell'altra classe tutti gli altri punti e dimostrando che la partizione ha la proprietà e soddisfa alle condizioni della partizione di DEDEKIND. Pertanto il postulato della continuità garantisce la esistenza di un elemento di separazione, che si dimostra subito essere unito per la corrispondenza.

Stabilita così la validità del Lemma, consideriamo infine un punto  $P_1$  dell'ovale ed il fascio di circonferenze ivi tangenti all'ovale. Con considerazioni facili di continuità si dimostra che se in  $P_1$  la curvatura non ha un massimo oppure un minimo locale esistono almeno due circonferenze appartenenti al fascio e tangenti altrove all'ovale.

Infatti dal Lemma 3 ultimamente dimostrato si trae che se  $P_1$  non è un massimo oppure un minimo locale per la curvatura dell'ovale, questo e la circonferenza osculatrice « si attraversano » nel punto  $P_1$ . Pertanto la circonferenza osculatrice in  $P_1$  all'ovale traversa questo almeno in un altro punto diverso da  $P_1$ .

Consideriamo ora l'insieme  $\Phi$  delle circonferenze del fascio che stanno, rispetto alla tangente all'ovale in  $P_1$ , dalla parte dell'ovale. Vi è ovviamente corrispondenza biunivoca tra ogni circonferenza dell'insieme  $\Phi$  ed il valore del suo raggio; ed è chiaro che per valori del raggio abbastanza piccoli la circonferenze dell'insieme  $\Phi$  non intersecano fuori di  $P_1$  l'ovale ma sono tutte interne a questo. D'altra parte per l'osservazione ora fatta almeno la circonferenza osculatrice all'ovale in  $P_1$  trasversa l'ovale fuori di  $P_1$ .

Eseguendo ora una partizione nell'insieme dei valori dei

raggi delle circonferenze del fascio si dimostra facilmente che anche in questo caso questa partizione ha le caratteristiche delle partizioni di DEDEKIND. Quindi, sulla base del postulato di continuità, si dimostra che esiste un minimo valore del raggio in corrispondenza al quale la circonferenza dell'insieme  $\Phi$  interseca l'ovale fuori di  $P_1$ .

Si dimostra inoltre immediatamente che tale circonferenza non ha punti esterni all'ovale e che quindi lo tocca almeno in un punto  $P_2$  diverso da  $P_1$ . Se non vi sono altri contatti tra l'ovale e la circonferenza fuori di  $P_1$  e  $P_2$  si dimostra pure che la corrispondenza tra  $P_1$  e  $P_2$  è involutoria.

Considerazioni perfettamente analoghe (che non stiamo a ripetere per brevità) permettono di dimostrare che nell'insieme  $\Phi$  esiste una circonferenza che non ha punti interni all'ovale e tocca questo almeno in un altro punto fuori di  $P_1$ .

Ovviamente i ragionamenti ora svolti non escludono che esistano altre circonferenze dell'insieme  $\Phi$  diverse dalle due ora considerate, le quali toccano l'ovale fuori di  $P_1$ . Una di queste può avere per es. due punti di contatto e due intersezioni semplici con l'ovale. Tuttavia per semplicità supporremo che non esistano circonferenze che toccano l'ovale in più di due punti e non hanno punti esterni a questo, come pure supporremo che non esistano circonferenze che toccano l'ovale in più di due punti e non hanno punti interni a questo.

Questa ipotesi semplificatrice risparmierà molte analisi delicate e distinzioni minuziose nelle dimostrazioni che seguono, conformemente al tono strettamente illustrativo che vogliamo conservare a questo articolo. Tuttavia l'ipotesi non è affatto necessaria per la validità generale del teorema, che sussiste e può essere dimostrato con procedimenti analoghi a quelli che esporremo (se pure con analisi più complete) anche senza supporre la validità della ipotesi semplificatrice ora enunciata.

§ 6. - Dopo i richiami fatti e le osservazioni svolte nel § precedente, la dimostrazione del teorema segue facilmente solo che si consegua la validità di due Lemmi che riguardano la corrispondenza tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  che sono punti di contatto dell'ovale e di una circonferenza che non ha punti esterni oppure che non ha punti interni all'ovale stesso.

Si ha anzitutto il

LEMMA 5. - La corrispondenza tra  $P_1$  e  $P_2$  è discorde. In altre parole se  $P_1$  varia sull'ovale in un verso, allora  $P_2$  (beninteso sotto la condizione che esista sempre una circonferenza tangente tanto in  $P_1$  che in  $P_2$ ) varia nel senso opposto.

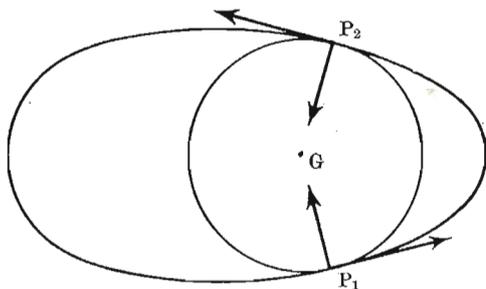


Fig. 4

Per la dimostrazione si indichino con  $s_1$  ed  $s_2$  rispettivamente le ascisse curvilinee di  $P_1$  e  $P_2$ ; siano poi  $t_1, n_1$  e  $t_2, n_2$  i versori tangente e normale all'ovale rispettivamente in  $P_1$  e  $P_2$ ; ed infine siano  $c_1$  e  $c_2$  i valori della curvatura nei punti.

Indichiamo con  $G$  il centro della circonferenza (per ipotesi esistente) tangente all'ovale in  $P_1$  ed in  $P_2$  e sia  $r$  il raggio. Si ha ovviamente

$$(25) \quad G = P_1 + r n_1 = P_2 + r n_2,$$

e di qui si trae

$$(26) \quad P_1 - P_2 = r(n_2 - n_1).$$

Si dimostra immediatamente che il sussistere della (26) è condizione non solo necessaria ma anche sufficiente perchè esista una circonferenza di raggio  $r$  tangente all'ovale in  $P_1$  e  $P_2$ .

Dalla (26) differenziando si ha

$$dP_1 - dP_2 = r(dn_2 - dn_1) + dr(n_2 - n_1),$$

e di qui ricordando anche le (1) e (5) si trae

$$(27) \quad t_1 ds_1 - t_2 ds_2 = r(c_1 t_1 ds_1 - c_2 t_2 ds_2) + dr(n_2 - n_1).$$

Moltiplichiamo ora scalarmente la (27) prima per  $\mathbf{t}_1$  e poi per  $\mathbf{n}_1$  e teniamo presente che, indicando con  $\psi$  l'angolo tra i due versori tangenti  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ , si hanno le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_1 = 1 & \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_1 = 0 \\ \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \cos \psi & \mathbf{t}_1 \times \mathbf{n}_2 = -\sin \psi \\ \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_1 = 1 & \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \cos \psi \\ \mathbf{n}_1 \times \mathbf{t}_2 = \sin \psi. \end{array} \right.$$

Operando come si è detto si ottiene

$$\begin{aligned} (28) \quad & \left\{ \begin{array}{l} ds_1 - \cos \psi ds_2 = r(c_1 ds_1 - c_2 \cos \psi ds_2) - dr \sin \psi \\ (29) \quad - \sin \psi ds_2 = -rc_2 \sin \psi ds_2 + dr(\cos \psi - 1). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Poichè se i due punti sono distinti si ha ovviamente

$$\cos \psi \neq 1$$

è possibile dunque eliminare  $dr$  tra le (28) e (29) ottenendo così in definitiva la relazione

$$(30) \quad ds_1 + ds_2 = r(c_1 ds_1 + c_2 ds_2).$$

Si osservi ora che per ipotesi la circonferenza ha nei due punti  $P_1$  e  $P_2$  un contatto della stessa specie; supponendo per es. che in entrambi i punti la circonferenza sia tangente internamente si ha

$$rc_1 < 1, \quad rc_2 < 1.$$

Di qui scrivendo la (30) nella forma

$$(31) \quad ds_1(1 - rc_1) = ds_2(rc_2 - 1)$$

si trae immediatamente

$$(32) \quad \frac{ds_1}{ds_2} < 0$$

relazione che dimostra la tesi.

Se invece la circonferenza fosse tangente esternamente in

entrambi i punti si avrebbero le relazioni

$$rc_1 > 1, \quad rc_2 > 1$$

e la (32) varrebbe lo stesso.

Consideriamo ora due punti distinti  $P_1$  e  $P_2$  che siano di contatto per una circonferenza che non ha punti esterni oppure non ha punti interni all'ovale. Ciò che abbiamo ora dimostrato ci consente di applicare il Lemma 4 e quindi di concludere che sull'ovale vi sono (almeno) 4 punti tali che in essi la curvatura ha un massimo oppure un minimo locale.

Invero è facile accertare anzitutto che sull'ovale esistono almeno 4 punti uniti della corrispondenza che associa punti di contatto dell'ovale con circonferenze che non hanno punti interni oppure non hanno punti esterni all'ovale stesso.

Infatti le considerazioni da noi svolte si riferiscono ad uno dei due archi in cui la coppia  $P_1 P_2$  divide l'ovale ed accertano l'esistenza di almeno un punto unito nell'interno dell'arco stesso; applicando le stesse considerazioni all'altro arco si garantisce la esistenza di un secondo punto unito.

Applicando poi i ragionamenti a circonferenze che siano bitangenti all'ovale e non hanno punti esterni oppure non hanno punti interni ad esso si garantisce la esistenza di altri due punti uniti.

Consideriamo ora un punto unito della corrispondenza; sussiste il

LEMMA 6. - Quando la coppia di punti di contatto dell'ovale con una circonferenza bitangente (che sia tutta interna oppure tutta esterna) tendono ad un punto unito, il raggio della circonferenza stessa ha per limite il raggio di curvatura dell'ovale nel punto unito stesso.

Per la dimostrazione si consideri un punto  $P_0$  che sia unito per la corrispondenza considerata; come è sempre lecito fare, assumiamo  $P_0$  come origine delle ascisse curvilinee sull'ovale e indichiamo con  $c_0$ ,  $t_0$  ed  $n_0$  rispettivamente la curvatura, il versore tangente ed il versore normale all'ovale in  $P_0$ .

Indichiamo poi con  $s_1$  ed  $s_2$  rispettivamente le ascisse curvilinee dei due punti  $P_1$  e  $P_2$  corrispondenti che tendono a  $P_0$ , e con  $n_1$  e  $n_2$  i versori normali rispettivamente in  $P_1$  e  $P_2$ .

Adottando gli sviluppi di TAYLOR accorciati si può scrivere

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + s_1 t_0 + h_1 \\ P_2 = P_0 + s_2 t_0 + h_2 \end{cases}$$

dove con  $h_1$  ed  $h_2$  abbiamo indicato due vettori i cui moduli sono infinitesimi con  $s_1$  ed  $s_2$  rispettivamente di ordine superiore al primo. Analogamente si ha

$$\begin{cases} n_1 = n_0 - s_1 c_0 t_0 + k_1 \\ n_2 = n_0 - s_2 c_0 t_0 + k_2 \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con  $k_1$  e  $k_2$  rispettivamente due vettori i cui moduli sono infinitesimi con  $s_1$  ed  $s_2$  di ordine superiore al primo.

Applicando la (26) a questo caso particolare si ha

$$(33) \quad t_0(s_1 - s_2) + (h_1 - h_2) = r t_0(s_1 - s_2)c_0 + (k_1 - k_2).$$

Moltiplichiamo ora scalarmente entrambi i membri della (33) per  $t_0$  e osserviamo che i prodotti scalari

$$t_0 \times (h_1 - h_2), \quad t_0 \times (k_1 - k_2)$$

sono certamente di ordine superiore al primo rispetto alla funzione

$$\delta = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

mentre invece la differenza

$$s_1 - s_2$$

è certo infinitesima del primo ordine rispetto a  $\delta$ , perchè, per il Lemma 5, le due ascisse  $s_1$  ed  $s_2$  sono certamente di segno contrario.

Pertanto cercando i limiti di entrambi i membri della (33) quando  $s_1$  ed  $s_2$  tendono a zero ed indentificando gli infinitesimi di ugual ordine nei due membri si ha

$$\lim_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} r c_0 = 1$$

relazione che garantisce la validità del nostro enunciato.

Dal Lemma ora dimostrato la validità del teorema dei quattro vertici segue facilmente. Basta infatti osservare che, con riferimento alle notazioni introdotte nella dimostrazione dell'ultimo Lemma, i punti di contatto  $P_1$  e  $P_2$  che tendono al punto  $P_0$  sono punti di contatto della stessa specie; quindi la circonferenza che si ottiene come limite della circonferenza bitangente all'ovale in  $P_1$  e  $P_2$  (circonferenza che è osculatrice all'ovale per quanto è stato ora dimostrato) rimane tutta all'interno dell'ovale, almeno in un opportuno intorno del punto  $P_0$ . Si deduce di qui e dal Lemma 3 che la curvatura dell'ovale in  $P_0$  è un massimo oppure un minimo locale; e infine dalla esistenza di almeno 4 punti uniti della corrispondenza segue il teorema dei 4 vertici.

C. F. MANARA

## OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

AGOSTINELLI - <i>Istituzioni di fisica matematica</i> . Vol. I	7200
AGOSTINELLI e PIGNEDOLI - <i>Meccanica razionale</i> . Vol. I	6000
— — <i>Meccanica razionale</i> . Vol. II	4800
ALBERIGI-QUARANTA e RISPOLI - <i>Elettronica</i>	7200
<i>Atti del Congresso internazionale dei Matematici (1928)</i> 6 volumi. Ciascuno	1000
<i>Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana</i> , tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 Aprile 1937	3000
BELLUZZI - <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. I	6000
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. II	6000
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. III	7200
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. IV	4800
— — <i>Metodi semplici per lo studio delle lastre curve</i>	500
BOLCATO - <i>La chimica delle fermentazioni</i>	6000
BORDONI - <i>Fondamenti di fisica tecnica</i> . Vol. I	6000
CANNERI - <i>Nozioni di chimica analitica</i>	5000
CASTELNUOVO - <i>Calcolo delle probabilità</i> . Vol. I	2400
CHISINI - <i>Lezioni di geometria analitica e proiettiva</i>	4200
— — <i>Esercizi di geometria analitica e proiettiva</i>	2400
— — <i>Note e memorie di geometria (selezione)</i>	9600
COULSON - <i>La valenza</i>	3600
DE CASTRO - <i>Complementi di analisi matematica</i>	4800
DORE - <i>Fondamenti di fotogrammetria</i>	2400
ENRIQUES - <i>Le superficie algebriche</i> , con prefazione di G. Castelnuovo	3600
— — <i>Memorie scelte di geometria</i> . Volume I, 1893-1898	8000
— — <i>Memorie scelte di geometria</i> . Volume II, 1899-1910	8000
ENRIQUES e MAZZIOTTI - <i>Le dottrine di Democrito d'Abdera</i>	1500
EVANGELISTI - <i>La regolazione delle turbine idrauliche</i>	2600
FERRARO - <i>Piccolo dizionario di Metrologia generale</i> . Legato	3000
FERRI - <i>Guida dei principali prodotti chimici</i> . Vol. I	7000
Vol. II	8000
FILIPPI - <i>Resistenza dei materiali e applicazioni</i>	2500
FINZI - <i>Meccanica razionale</i> . Voll. I-II	8400
FINZI e PASTORI - <i>Calcolo tensoriale e applicazioni</i>	7200
FOÀ - <i>Fondamenti di termodinamica</i>	3600
FUBINI e ALBENGA - <i>La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni</i> . Vol. I	4800
Vol. II	7200
LELLI - <i>Bilancio energetico</i> . Legato	4000

ZANICHELLI - BOLOGNA

## OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

LEVI-CIVITA - <i>Opere matematiche - Memorie e note.</i>	
— — Volume I: 1893-1900	8000
— — Volume II: 1901-1907	9000
— — Volume III: 1908-1916	9000
— — Volume IV: 1917-1928	9000
LEVI-CIVITA e AMALDI - <i>Compendio di meccanica razionale.</i> Vol. I	2400
— — <i>Compendio di meccanica razionale.</i> Vol. II	2400
LEVI-CIVITA e AMALDI - <i>Lezioni di meccanica razionale:</i>	
Vol. I: <i>Cinematica - Principi e statica</i>	6000
Vol. II: <i>Dinamica dei sistemi con un numero finito di</i>	
<i>gradi di libertà</i> { Parte I	4800
{ Parte II	6000
MELLONI - <i>Opere.</i> Vol. I. Legato	5000
MONTAUTI - <i>Il telemetro monostatico</i>	2000
PERSICO - <i>Introduzione alla fisica matematica</i>	4800
— — <i>Gli atomi e la loro energia.</i> Legato	6600
RIGHI - <i>Scelta di scritti</i>	4000
RIMINI - <i>Elementi di elettrotecnica</i>	4800
— — <i>Fondamenti di radiotecnica generale</i>	5400
— — <i>Fondamenti di analisi matematica.</i> Vol. I	4800
— — <i>Fondamenti di analisi matematica.</i> Vol. II	7200
SANSONE - <i>Equazioni differenziali nel campo reale.</i> Parte I	4800
— — <i>Idem.</i> Parte II	4800
<i>Scritti Matematici</i> , offerti a LUIGI BERZOLARI	2500
SUPINO E. - <i>Il disegno di macchine</i>	600
TORALDO DI FRANCIA - <i>Onde elettromagnetiche</i>	3600
TRICOMI - <i>Funzioni ellittiche</i>	5400
— — <i>Funzioni analitiche</i>	2000
VITALI-SANSONE - <i>Moderna teoria delle funzioni di variabile</i>	
<i>reale.</i> Parte I	3600
— — Parte II	8200
VOLTA - <i>Epistolario.</i> Edizione nazionale. Vol. I	5000
— — Volume II	5000
— — Volume III	5000
— — Volume IV	6000
— — Volume V	6000
ZAGAR - <i>Astronomia sferica e teorica</i>	2500

ZANICHELLI - BOLOGNA